

Dagens 29/9

- Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Resttermen ges på ordoform.
 - $f(x) = \sin 3x$
 - $f(x) = \ln(1 + 2x)$
 - $f(x) = \ln(1 + 2x)\sin 3x$. (Använd 1a och b.)
 - $f(x) = e^{3x}$
- Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Resttermen ges på ordoform.
 - $f(x) = \ln(1 + 2x)$ kring $x = 0$
 - $f(x) = \ln(3 + 2x)$ kring $x = 0$
 - $f(x) = \ln(1 + 2x)$ kring $x = 1$ (Använd 2b.)
- Betrakta funktionen $f(x) = 4e^{3x} - e^{2x} - 3\sin 2x + 12\sin x$
 - Bestäm Taylorpolynomet av fjärde graden till f kring punkten $x = 0$.
 - Använd resultatet i a för att visa att $f(x) < 3$ om x ligger tillräckligt nära 0.

Svar

- $3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4)$
 - $2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^4)$
 - $6x^2 - 6x^3 + o(x^4)$
 - $1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4)$
- $2x - 2x^2 + o(x^3)$
 - $\ln 3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + o(x^3)$
 - $\ln 3 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + o((x-1)^3)$
- $3 - \frac{1}{2}x^4$

Dagens 1/10

1. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Resttermen ges på ordoform.

a. $f(x) = \sqrt{1+2x}$

b. $f(x) = e^{3x} \sqrt{1+2x}$

2. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Resttermen ges på ordoform.

a. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ kring $x = 0$

b. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ kring $x = -1$

c. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ kring $x = 0$

d. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ kring $x = 1$

3. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x + \sin 3x}{\ln(1+4x) + 5x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \sin 3x}{1 - e^{2x}}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{e^{4x} - 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctan 2x - 2 \ln(1+3x)}{1 - \cos 4x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \ln(3+4x^5) - 5 \ln(4+3x^2))$

(Skriv på formen $\ln(\text{bråk})$.)

f. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{1/x}$

(Använd $a^b = e^{b \ln a}$.)

g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin 2x \ln x$

($a \cdot b = b / (1/a)$)

h. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+6x)^{\cot 3x}$

4. Betrakta funktionen $f(x) = (e^{2x} - \cos^2 x)(\sin x - \ln(1-x))$.

a. Bestäm MacLaurinpolynomet av andra graden till f .

b. Sök $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

5. Betrakta kurvan $2y = x + x^2 \ln \frac{1+x}{x} - \ln(1+x)$. Låt $f(x)$ beteckna vinkeln mellan tangenten till kurvan i punkten (x,y) och x -axeln. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

6. Bestäm eventuella asymptoter till kurvorna

a. $y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1} - x^2$

b. $y = \frac{(2x+1)\arctan 4x}{x+1}$

7. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

a. $y'' - y' + 2y = 0$

b. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

c. $y'' - 6y' + 13y = 0$

d. $2y'' + 3y' - y = 0$.

Svar

1. a. $1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4$ b. $1 - 2x + x^2 + 2x^3 + \frac{1}{24}x^4$
2. a. $1 - 2x + 4x^2 + \frac{1}{6}x^3$ b. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1)^3$
c. $2 + 3x + 4x^2 + \frac{1}{6}x^3$ d. $14 + 26(x-1) + 19(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3$
3. a. 5 b. 2 c. 3 d. $\frac{9}{8}$
e. $4 \ln 2 - 5 \ln 3$ f. e^2 g. 0 h. e^2
4. a. $4x^2 + O(x^3)$ b. 4
5. $\pi/4$
6. a. $y = 3$ b. $y = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$
7. a. $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$ b. $y = e^{3x}(A + Bx)$
c. $y = e^{3x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$ d. $y = Ae^{-x} + Be^{-x/2}$